Grandeurs

I. Présentation

Réhabilitation

L'antique notion de grandeur, nommée *mégéthos*, chez Euclide (de *mégas* voulant dire « grand ») fut dédaignée dans l'enseignement — en même temps que le fut Euclide — à partir de la réforme des « math. modernes » des années 70. À cause sans doute de cette occultation, la plus grande confusion règne aujourd'hui, à ce sujet, dans les esprits. Bien des gens semblent croire que les grandeurs ont leur place en physique, mais pas en mathématiques ; ou encore que c'est bon pour les enfants, mais pas pour les adultes. Or paradoxalement, c'est grâce au point de vue « moderne » qu'on peut qu'on *peut* attribuer à cette notion un sens rigoureux.

Intérêt

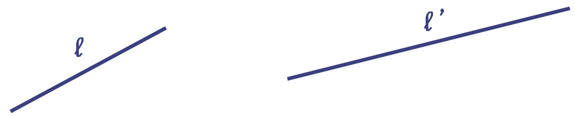
La mise au point conceptuelle qui suit vous aidera à organiser avec profit votre pensée mathématique dans des domaines variés, comme la proportionnalité et la trigonométrie.

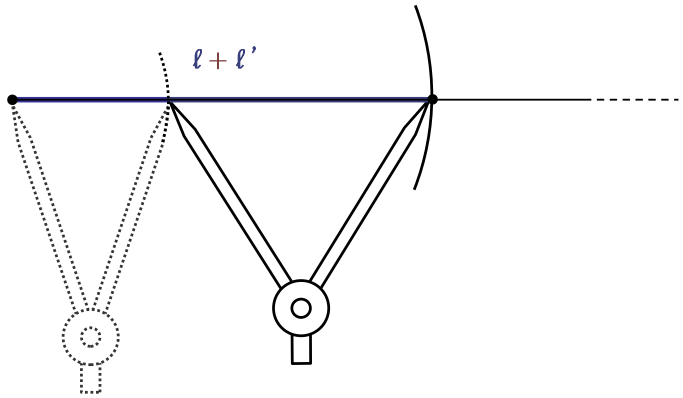
II. Grandeur / mesure

Grandeur

Une **grandeur** est ce qui peut être plus ou moins grand. <u>Une **grandeur** est une propriété qui peut être comparée, ajoutée</u>, sans que cela nécessite l'intervention des nombres. Par exemple, pour comparer les longueurs de deux segments, pas besoin de nombre :

on peut les mettre côte à côte : s'ils sont parfaitement superposables, c'est qu'ils ont même longueur. Et pour ajouter leurs longueurs, nul besoin de calculer ; on peut les mettre bout à bout :





De cette façon, on définit une nouvelle addition, qui n'est pas l'addition habituelle sur les nombres, mais une addition sur les longueurs. Rigoureusement, on devrait la noter par un nouveau signe opératoire.

Mesure

Une **mesure**, ce n'est pas forcément « ce que l'on mesure » avec un instrument. Cet acte de mesurer n'est pas à proprement parler mathématique, puisqu'il se déroule dans le monde réel. Les mesures ainsi obtenues sont forcément imprécises et plutôt du ressort de la physique. Mais en mathématiques, sans utiliser de dessin ni de rapporteur, par le seul raisonnement, on peut démontrer que la mesure en degré d'un triangle équilatéral est de 60 <u>exactement</u>.

Une **mesure** est un <u>nombre</u>, un nombre pur, sans unité. La mesure permet d'écrire, de mémoriser, de communiquer, bref, de « numériser » une grandeur et aussi de la faire bénéficier de toutes les opérations et de tous théorèmes concernant les nombres. Pour cela, il faut commencer par choisir une **unité de mesure**.

10 cm, est une longueur, donc une grandeur. Cette grandeur, contrairement aux apparences, ne contient pas le nombre 10, car on pourrait aussi bien l'écrire « **1 dm** ». La mesure, en centimètre, de cette grandeur, en revanche, est le nombre 10.

De la même façon, notons au passage que 45° est bien un angle et non une mesure d'angle. C'est 45 qui en est la mesure (en degré).

La mesure d'une grandeur est proportionnelle à cette grandeur : si l'on double un angle, sa mesure en degré est multipliés par deux. Si l'on additionne deux segments en les mettant bout à bout, la mesure du segment obtenu est la somme des mesures des deux segments initiaux. Autrement dit, lorsqu'on construit une addition sur un certain type de grandeur, elle doit être si possible compatible avec l'addition sur les nombres.

EXEMPLES

Les grandeurs mathématiques rencontrées dans l'enseignement secondaire sont toutes géométriques.

figure	grandeur	exemple d'unité de mesure
ligne	longueur	cm
surface	aire	cm^2
solide	volume	cm^3
secteur angulaire	angle	degré

Puisque l'angle est la grandeur et le secteur la figure, on ne devrait pas parler d'*angles* adjacents, ni des côtés d'un *angle* ; mais de secteurs adjacents et des côtés d'un secteur. L'abus de langage est courrant ; au moins faut-il être conscient que c'en est un.

PRÉCISIONS

L'UNITÉ DE LONGUEUR IMPLICITE

Au lycée, sans crier gare, on abandonne soudain les grandeurs. Certains élèves de seconde, entendant parler de « cercle de rayon 1 », ou de « vecteur de norme 3 » se demandent à juste titre : 1 quoi ? 3 quoi ?

Il faut savoir que sans le dire, on considère soudain qu'une unité de longueur a été choisie **arbitrairement** comme référence. Notons **u** cette unité de longueur **implicite.** Ensuite, au lieu de donner des longueurs, des aires, des volumes, on en donne des mesures avec pour unité, respectivement, $\mathbf{u}, \mathbf{u}^2$ et $\mathbf{u}^3$.

DISTANCE / LONGUEUR

Théoriquement, chez les « modernes », la distance est une mesure, donc un nombre pur, donc pas une longueur. Je pense pour ma part qu'il faudrait conserver deux type de distances, une distance-mesure et une distance-grandeur.

III. CLASSE D'ÉQUIVALENCE

ÉQUIVALENCE

Pour définir une grandeur, il faut commencer par fournir un « critère d'égalité ». Par exemple, deux segments ont même longueur lorsqu'ils sont superposables, *idem* pour des secteurs de même angle. Ça se complique singulièrement pour les aires, les volumes, ou encore les longueurs de courbes. Nous laisserons ici ce problème de côté[1].

Ce « critère d'égalité » s'appelle une **relation d'équivalence.**

CLASSE

Une fois qu'on a formé le critère qui permet de dire à quelle condition deux segments ont 'même-longueur', on peut en tirer le concept de longueur : la longueur est « ce qu'on en commun tous les

[1] Les mathématiciens « modernes » ont tendance à tricher un peu, en commençant par définir une mesure au lieu de la grandeur qu'elle est censée mesurer. Le problème des aires et des volumes relève donc aujourd'hui de la *théorie de la mesure* (et non « théorie de la grandeur »). En classe de terminale, avec la notion d'*intégrale*, on commence à découvrir comment il est possible de mesurer des surface délimitées par des courbes.

segments de même-longueur ». Ou disons plutôt, pour éviter l'apparente **tautologie,** que la longueur d'un segment est la propriété commune à tous les segments qui lui sont superposables[2]. En termes modernes, la longueur d'un segment est l'ensemble de tous les segments qui lui sont superposables. C'est cet ensemble qu'on appelle une **classe d'équivalence.**

REPRÉSENTANT

Chaque élément de cet ensemble, c'est-à-dire chaque objet ayant telle grandeur est un **représentant** de cette grandeur.

Ainsi, tous les quadrants du plan (un **quadrant** est un secteur saillants dont les côtés sont perpendiculaires) sont des *représentants* de l'angle droit. Il y a un seul angle droit, mais une infinité de secteurs pour le représenter.

MÉTAPHORES

Il peut sembler paradoxal de former un objet aussi gros et complexe qu'un *ensemble* d'une infinité de figures (un ensemble d'ensembles) pour caractériser une propriété qui ne conserve finalement qu'une petite partie de l'information de ladite figure. On compte sur le fait que trop d'information tue l'information.

Imaginons que le code de tir nucléaire, imprimé sur une petite carte plastifiée ait été oubliée par le président de la république dans un costume envoyé chez le teinturier[3]. Le teinturier en question,

[2] C'est ainsi que l'égalité-en-longueur précède la notion de longueur. C'est ce qui se passe en effet en géométrie euclidienne où cette égalité est un concept premier, axiomatisé et non défini.

[3] Il semblerait que cette mésaventure, précisément, soit arrivée à la fois à Jimmy Carter et à François Mitterrand. La suite est pure fiction.

facétieux, s'amuse alors à divulguer le code sur Internet. Supposons qu'il ne soit pas possible de modifier ce code. Comment faire alors pour faire disparaître l'information divulguée ? On sait bien que chercher à effacer une information circulant sur Internet est peine perdue. En revanche, on peut imaginer que les services de renseignement (en l'occurrence de désinformation) divulguent de faux codes en grand nombre, de façon à noyer l'information dans l'information. Si tous ces codes ont une propriété commune, comme par exemple d'être des nombres de huit chiffres, alors cette information-là surnagera.

On peut aussi penser à *La Bibliothèque de Babel*, nouvelle de l'écrivain argentin Jorge Luis Borges. La bibliothèque en question contient tous les livres de 410 pages possibles. À moins qu'un classement intelligent n'y soit institué (par intérêt décroissant, par exemple), cette bibliothèque est en fait l'équivalent de pas de livre du tout.

EXEMPLES

On définit la notion de direction, en prenant pour *relation d'équivalence* le parallélisme : une **direction** est l'ensemble de toutes les droites parallèles à une droite donnée.
On pourrait croire que l'ensemble de toutes les droites parallèles à une droite donnée reconstitue le plan lui-même. Ce serait confondre l'ensemble de ces droites avec leur réunion. Un paquet de paquets de billes, ce n'est pas tout à fait un paquet de billes. Dans le paquet de paquets, les billes peuvent être regroupées selon un classement particulier ; selon, par exemple, la semaine où elles ont été gagnées. Si l'on ouvre les « sous-paquets » pour jeter les billes en

vrac dans grand sac, on ne pourra plus savoir si deux billes données ont été ou non gagnées la même semaine.

Pour définir rigoureusement un *vecteur*, on passe aussi par les classes d'équivalences. La « figure » de départ n'est pas tout à fait une figure : c'est un **bipoint**, c'est-à-dire un *couple* de points. Le but est d'éliminer l'information de la position, en préservant celles de la direction, du sens et de la 'longueur'. La relation d'équivalence considérée s'appelle l'**équipollence**. Deux bipoints (A ; B) et (A' ; B') sont **équipollents** si, pour aller de A à B, on se déplace selon la même direction, le même sens, la même distance, que pour aller de A' à B'. On résume cette triple condition en une seule : $ABB'A'$ est un parallélogramme (éventuellement 'aplati'). Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est l'ensemble de tous bipoints *équipollents à* (A ; B).
Le vecteur ressemble beaucoup à une grandeur. Nos amis physiciens parlent d'ailleurs de « grandeurs vectorielles »[4].

IV. Opérations

ADDITION

Quand on définit une grandeur, on définit en même temps, ou juste après, disons, une addition. Nous avons déjà évoqué l'addition des longueurs. Celle des angles lui ressemble : on prend un secteur représentant chacun des angles à additionner et on colle ces secteurs l'un contre l'autre de façon qu'ils soient *adjacents*. Le secteur formé par leur réunion est alors un représentant de l'angle somme.

[4] L'*algèbre linéaire* est un domaine des mathématiques où l'on généralise la notion de vecteur. On y parle d'*espace vectoriel*. Si le vecteur est lui-même une sorte de généralisation des grandeurs, on peut dire que c'est dans le domaine de l'algèbre linéaire que se prolonge l'étude des grandeurs.

Une addition de grandeurs est **interne** : on ne peut pas additionner des grandeurs de natures différentes. Par exemple, 1 cm + 1 cm², cela n'a pas de sens. On peut, en revanche, additionner des grandeurs de même nature, mais d'unités différentes. Rien n'empêche en effet de mettre bout à bout un segment d'un kilomètre et un segment d'un centimètre. C'est pour *réduire* l'expression « 1 km + 1 cm », qu'il faut tout convertir en une même unité, mais l'expression, telle quelle, a quand même un sens.

MULTIPLICATION D'UNE GRANDEUR PAR UN NOMBRE

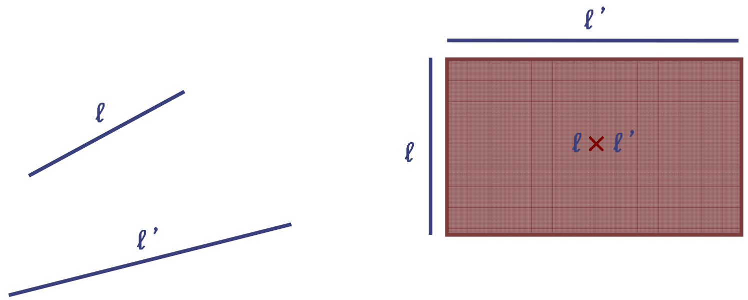
À partir de l'addition on peut définir une multiplication **externe**, similaire à celle sur les vecteurs ; une multiplication d'une grandeur par un nombre pur. En effet, si l'on a une longueur L, on définit évidemment $2L$ comme étant $L + L$. Même principe pour $3L$, $4L$, etc. Sans oublier de poser : $1L = L$. Ensuite, là où l'on a une multiplication, on a normalement une division, qui est son opération inverse. S'il est vrai qu'il existe une unique longueur dont le double est la longueur L, alors on peut écrire cette longueur $\frac{L}{2}$. On l'écrit plutôt $\frac{1}{2}L$, mais c'est la même chose. Idem pour $\frac{1}{3}L$, $\frac{1}{4}L$, etc. En combinant multiplication par un entier et division par un entier, on définit le produit par une fraction, comme $\frac{7}{3}L$. On peut en général étendre cette multiplication à une multiplication par n'importe quel réel positif.

MULTIPLICATION DE DEUX GRANDEURS

Il est relativement rare qu'on puisse multiplier une grandeur par

une grandeur. D'ailleurs on ne peut pas, en général, multiplier un nombre-de (quelque chose) par un autre nombre-de. Par exemple, 2 pommes × 3 pommes, cela n'a pas de sens. 2 × 3 pommes, oui, cela a un sens : « deux fois, trois pommes », c'est le double de trois pommes et ça fait 6 pommes. Mais 2 pommes × 3 pommes, cela ne veut rien dire.

Il y a des exceptions. Par exemple, on définit le produit de deux <u>longueurs</u> en décrétant que c'est l'<u>aire</u> du rectangle qui a ces deux longueurs pour dimensions :



De cette façon, on peut écrire : 2 cm × 3 cm = 6 cm²

Remarquons que l'expression « 7 dm × 2 m » a un sens.

D'une façon similaire, on fabrique la multiplication d'une aire par une longueur, qui donne un volume.

DIVISION

Comme susdit, là où il y a de la multiplication, il y a de la division. Si 2 cm × 3 cm = 6 cm², alors 6 cm² ÷ 3 cm = 2 cm. Nous allons voir cela plus en détail dans le paragraphe suivant, qui présente la notion fondamentale de *rapport*.

RAPPORT

« Un rapport est un quotient de deux grandeurs de même nature. Il sert à les comparer « en proportion ». Cette notion intervient dans la définition de pi, dans le théorème de Thalès et aussi dans les définitions de sinus, cosinus et tangente, qu'on appelle des rapports trigonométriques.

— Et dans les pourcentages aussi ?

— Précisez.

— On parlait de « rapport de proportionnalité ».

— Ah ! En effet, la proportionnalité se définit par une égalité de rapports. On peut ensuite mettre ce rapport en pourcentage, mais ce n'est pas une obligation. Bon, vous avez compris ce qu'était un rapport ?

— Mouaih… Peut-être aurez-vous l'obligeance de me l'illustrer par un exemple concret ?

— Concret, je ne sais pas trop… En mathématiques, nous ne traitons que d'abstractions, vous savez…

— Un exemple simple et éloquent, alors.

— Pourquoi pas. Alors, par exemple : 15 m, par rapport à 5 m, qu'est-ce que c'est ?

— Euh… c'est plus grand ?

— Certes mais plus précisément ?

— C'est le triple ?

— Oui. On dit que le rapport de 15 m à 5 m est **3**. Et en effet, 15 m divisé par 5 m, ça fait le nombre trois.

— Pas trois *mètres* ?

— Non : trois *tout court*. En effet, le résultat d'une division s'appelle le *quotient*, ce qui, en latin, veut dire « combien de fois ». Le

quotient dit combien de fois le dividende entre dans le diviseur. Il faut, lorsqu'on multiplie le dividende par le quotient, qu'on retrouve le diviseur :

$$\begin{array}{r|l} 15\,\text{m} & 5\,\text{m} \\ \hline & \mathbf{3} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 15\,\text{m}^2 & 5\,\text{m} \\ \hline & \mathbf{3\,m} \end{array}$$

$\dfrac{15\,\text{m}}{5\,\text{m}} = \mathbf{3}$ parce que $15\,\text{m} = \mathbf{3} \times 5\,\text{m}$. Alors que $\mathbf{3\,cm} \times 5\,\text{m}$, cela donne $15\,\text{m}^2$.

— C'est comme si on simplifiait l'unité, alors ?

— Comment cela ?

— Eh bien, de cette façon : $\dfrac{15\,\text{m}}{5\,\text{m}} = \dfrac{15\,\cancel{\text{m}}}{5\,\cancel{\text{m}}} = \dfrac{15}{5} = \mathbf{3}$.

— Ah oui ! Très juste.

— Et à la fin, les unités disparaissent toujours ?

— S'il s'agit d'un rapport, oui, puisque c'est un quotient de deux grandeurs de même nature. Ainsi, $\dfrac{15\,\text{m}^2}{5\,\text{m}}$ n'est pas un rapport. Un rapport, du moins selon le point de vue d'aujourd'hui, est un « nombre pur ». Je le répète car c'est important : **un rapport est un nombre, un nombre pur, sans unité**.

— C'est une *mesure* ?

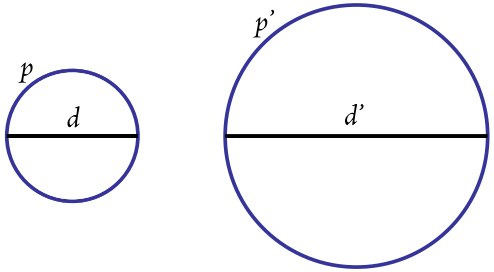
— On peut le voir ainsi en effet. On peut dire que 15 m, *rapporté à* 5 m, cela donne 3. C'est comme si l'on *mesurait* la longueur 15 m en prenant pour unité de mesure la longueur 5 m. « Rapporter » a ici le sens de « mesurer ».

— Comme dans le mot « rapporteur » ?

— En effet, bonne remarque.

— Merci. Vous disiez que les rapports servaient à définir pi ?

— Exactement. Pi <u>est</u> un rapport. C'est le rapport du périmètre d'un cercle à son diamètre. Ce nombre ne dépend pas du cercle considéré. Si vous doublez la taille du cercle, vous doublez à la fois son diamètre et son périmètre de sorte que ce quotient qu'est le rapport ne change pas :



$$\frac{p'}{d'} = \frac{2p}{2d} = \frac{p}{d} = \boxed{\pi}$$

Voulez-vous qu'à présent nous parlions du théorème de Thalès ?

— Non merci, ça va bien comme ça, j'ai compris. »

V. CALCULS

LES UNITÉS DANS LES CALCULS

Réhabiliter les grandeurs, cela permet, en toute rigueur, de calculer « avec les unités ». Cela rend les calculs plus clairs, plus simples ; et peut aider à déceler des erreurs[5]. Cela peut préparer à ce qui est fait

[5] Je ne peux m'enpêcher ici, d'évoquer la sonde spatiale *Mars Climat Orbiter*, qui s'est écrasée à la surface de mars en 1999. L'enquête a montré qu'aucun problème matériel n'en était responsable. Certains paramètres, calculés en unités de mesures anglo-saxonnes, avaient été transmis à des ingénieurs qui attendaient des données en unités du système métrique.

en physique, où « l'analyse dimensionnelle » permet de vérifier la plausibilité des formules existantes, voire d'en **conjecturer** de nouvelles.

GRANDEURS GÉOMÉTRIQUES

Quelle est l'aire d'un triangle dont le hauteur est de 15 cm et la base de 2 dm ?

$$\frac{15\,\text{cm} \times 2\,\text{dm}}{2} = \frac{15\,\text{cm} \times 20\,\text{cm}}{2} = \frac{300\,\text{cm}^2}{2} = \boxed{150\,\text{cm}^2}$$

Quel est la longueur d'un rectangle dont l'aire est de 1 m^2 et dont la largeur est de 50 cm ?

$$\frac{1\,\text{m}^2}{50\,\text{cm}} = \frac{(1\,\text{m})^2}{50\,\text{cm}} = \frac{(100\,\text{cm})^2}{50\,\text{cm}} = \frac{100\,\text{cm} \times 100\,\text{cm}}{50\,\text{cm}} = \boxed{200\,\text{cm}}$$

Convertir $750\,\ell$ en m^3.

$$750\,\ell = 750\,\text{dm}^3 = 750 \times \left(10^{-1}\,\text{m}\right)^3 = 750 \times 10^{-3}\,\text{m}^3 = \boxed{0{,}75\,\text{m}^3}$$

GRANDEURS PHYSIQUES

Convertir 90 km/h en m/s.

$$90\,\text{km/h} = \frac{90\,\text{km}}{1\,\text{h}} = \frac{90 \times 1000\,\text{m}}{3600\,\text{s}} = \boxed{25\,\text{m/s}}$$

À titre d'exemple, voilà par quoi il faudrait remplacer le calcul précédent si l'on ne s'autorisait pas à calculer avec les unités :

Si l'on parcours 90km en une heure, on parcours, dans le même temps, 1000 fois plus de mètres, donc 90 000 m en une heure. Mais en une seconde, on parcours 3600 fois moins de distance qu'en une heure : 90 000 ÷ 3600 = 25 m/s.

Convertir 0,23h en minutes et secondes

$$0{,}23\,\text{h} = 0{,}23\times 60\ \text{min} = 13{,}8\ \text{min} = 13\ \text{min} + 0{,}8\ \text{min}$$
$$= 13\ \text{min} + 0{,}8\times 60\ \text{s} = \boxed{13\ \text{min}\,48\ \text{s}}$$

Quelle est la distance parcourue en 90 secondes par un mobile qui va à 25km/h ?

Notons **v** la vitesse, **t** la durée du parcours et **d** la distance parcourue. On a, par définition : $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{t}}$ donc : $\mathbf{d} = \mathbf{vt}$.

$$\mathbf{d} = 25\,\text{km/h}\times 90\,\text{s} = \frac{25\,\text{km}}{1\,\text{h}}\times 90\,\text{s} = \frac{25\,\text{km}}{3600\,\cancel{\text{s}}}\times 90\,\cancel{\text{s}}$$
$$= \frac{25\,\text{km}}{4} = \boxed{6{,}25\,\text{km}}$$

VIE COURANTE

Un pull vendu 125€ est soldé à 20%. Quel est son nouveau prix ?

$$125\,€ + 20\%\times 125\,€ = 125\,€ + 25\,€ = \boxed{150\,€}$$

VI. RÉTICENCES

La lecture de ce qui suit est hautement facultative.

MALAISE CHEZ LES GRANDEURS

À l'heure où j'écris ces lignes, il n'est presque pas fait mention des grandeurs dans les programmes du lycée général[6], alors qu'elles sont très présentes dans les programmes du primaire et du collège. Les grandeurs continuent donc à susciter la méfiance, alors même que

[6] Le mot apparaît une fois de façon anecdotique dans l'enseignement de spécialité de la série ES.

les **didacticiens** ont tendance à plaider en leur faveur. Nous allons essayer d'analyser les causes possibles de ce blocage

CONFUSIONS

NOTATION

La confusion entre grandeur et mesure s'installe dans l'enseignement secondaire à cause de l'absence de notation adaptée. Ainsi, « AB » représente normalement la <u>longueur</u> du segment $[AB]$. Mais il n'y a pas, au collège ni au lycée, de notation officielle pour parler de la *mesure* de ce segment dans une unité donnée. Dans le *Dictionnaire des mathématiques élémentaires*, Stella Baruk propose de la noter « $\underline{AB}_{\text{cm}}$ » ou encore, si le contexte rend évident le choix de l'unité de mesure implicite : « $\underline{AB}$ ». Cette notation est très bien choisie. Elle rappelle la notation de la mesure algébrique : « $\overline{AB}$ » (voir chapitre sur les vecteurs). De plus, ce trait de soulignement peut aussi évoquer un trait de fraction, ce qui est bienvenu, puisque la mesure de $[AB]$ en centimètres peut être vue comme le *rapport* de la longueur AB à la longueur **1cm** : $\underline{AB}_{\text{cm}} = \frac{AB}{1\ \text{cm}}$.

MATHÉMATIQUE / NON MATHÉMATIQUE

Il y a des grandeurs authentiquement mathématiques, comme les angles ; et d'autres qui ne le sont pas, comme la température. Ne par établir clairement la distinction conduit sans doute à répandre l'idée que les grandeurs ne sont pas du ressort des mathématiques. C'est peut-être avec les longueurs (et par suite avec les aires et les volumes) que la situation s'avère particulièrement ambiguë, comme nous l'allons voir dans le prochain paragraphe.

Unités homonymes

Il y a en effet les longueurs mathématiques et les longueurs du monde réel. Et on ne devrait pas mélanger les deux en utilisant les mêmes unités ! On ne devrait pas, par exemple, utiliser le centimètre pour unité en géométrie – *géométrie*, mot dont l'étymologie ajoute à la confusion. Le centimètre est défini comme le centièmes d'un mètre et le *mètre* est originairement fabriqué comme étant le quart de la dix millionième partie du méridien terrestre. Autrement dit, si le tour de la terre fait 'pile' 40 000 km, ce n'est pas que Dieu a fait la terre ainsi pour faciliter la vie aux terriens, mais c'est que le mètre a été fabriqué ainsi par les terriens de la Révolution française.

Bref, le mètre est une unité du monde réel. Or il n'y a rien de commun et particulièrement pas de « commune mesure » entre le monde réel et le monde géométrique. Il est même nécessaire de s'être bien imprégné de cette distinction épistémologique pour pouvoir faire des mathématiques. Si l'on pouvait l'entériner par l'usage d'unités différentes, cela aiderait les collégiens à comprendre les mathématiques et peut-être aussi les mathématiciens à ne plus dédaigner les grandeurs manipulées par les collégiens.

À défaut, nous dirons des **centimètres concrets** et des **centimètres géométriques** qu'ils ne sont liés que par une regrettable homonymie et que personne se saura jamais lequel des deux est plus grand que l'autre, puisque les univers où ils existent ne se rencontrent pas. On a néanmoins l'habitude de représenter sur une feuille, le centimètre géométrique par un centimètre concret.

Émancipation fertile

Il y a une certaine légitimité à se satisfaire d'une pensée mathématique débarrassée des grandeurs.

Les « géomètres » de l'antiquité ne concevaient pas les rapports comme des « nombres », c'est-à-dire comme des objets de la même nature que les nombres entiers (*arithmos*) et capable d'opérer avec eux. La notion de **nombre réel**, par exemple, n'arrive qu'après un long cheminement[7], au cours duquel il a parfois fallu inventer des nombres pour rendre compte de l'existence de certaines grandeurs (par exemple les racines) et parfois au contraire s'émanciper des grandeurs pour permettre l'existence de certains nombres (notamment les négatifs). Finalement, le *nombre* est devenu un concept suffisamment fin pour être capable de servir de modèle aux grandeurs (au point de s'y substituer) et suffisamment large pour atteindre des domaines auxquels les grandeurs n'ont pas accès.

[7] On pourra par exemple consulter en ligne : *De la Théorie des Proportions à la Théorie des Nombres Réels*, pages 12 à 18. Éliane Cousquer. *Quelques Éléments de l'Histoire des Nombres Négatifs*. Anne Boyé.